OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a V-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

a) Submulţimile sunt $\{2,3,5\}$ şi $\{4,6\}$......1p

b) Observăm, mai întâi, că suma elementelor unei mulţimi *interesante* este un număr par.....1p

Dar, suma elementelor lui A este $\frac{2010\cdot 2011}{2} = 1005\cdot 2011$, deci este un număr impar, prin urmare, A *nu* este *interesantă*......2p

c) Punctul a) sugerează partiţionarea mulţimii $A\backslash\{1\}$ în două mulţimi interesante astfel:

$A\backslash\{1\} = B\cup\{7,8,...2010\}$. În continuare fie $C=\{2,3,5\}$, $D=\{4,6\}$, $E=\{7,2010,8,2009,...,507,1510\}$ şi $F=\{508,1509,509,1508,...,1008,1009\}$. Mulţimile $C\cup E$ şi $D\cup F$ au aceeaşi sumă a elementelor şi o partiţionează pe $A\backslash\{1\}$, deci $A\backslash\{1\}$ este *interesantă*..... 3p

SUBIECTUL II

a) $a_1=5\cdot 1+2$, $a_2=5\cdot 2+2$, $,a_3=5\cdot 3+2$, $a_4=5\cdot 4+2$, deci $a_5=5\cdot 5+2=27$, $a_{10}=5\cdot 10+2=52$, $,a_{100}=5\cdot 100+2=502$......2p

b) $a_n=5\cdot n+2$, unde $n\in\mathbf{N}^*$......1p

c) Dacă n este număr par, atunci ultima cifră a numărului a_n este 2, dacă n este număr impar, atunci ultima cifră a numărului a_n este 7. Dar, ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi $0,1,4,5,6,9$, deci $a_n=5\cdot n+2$ nu poate fi pătrat perfect.....2p

d) $a_1+a_2+...+a_{2010}=5(1+2+...+2010)+2010\cdot 2=5\frac{2010\cdot 2011}{2}+4020=1005\cdot 10059=10109295$....2p.

SUBIECTUL III

a) Exemplu $2010=10\cdot 201$......1p

b) Ştiind că a^n are aceeaşi paritate cu a, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, din relaţia $a^{2010}-b^{2010}=2009^{2010}$ deducem că $a^{2010}-b^{2010}$ este impar, deci a şi b au parităţi diferite, de unde rezultă că $a+b$ este un număr impar...........3p

c) Ştiind că $a\cdot b=2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$ rezultă a şi b au parităţi diferite, iar din relaţia $a^{2010}-b^{2010}=2010$ deducem că $a^{2010}-b^{2010}$ este par, deci a şi b au aceeaşi paritate, ceea ce este în contradicţie cu a şi b au parităţi diferite. Deci, nu exisă numere naturale a şi b astfel încât $a\cdot b=a^{2010}-b^{2010}=2010$.....3p